04/04/2019.

Μάθημα 10ο

Αρχή Διατήρησης

$\bar p = m\bar V$, ορμή $\quad \frac{d\bar p}{dt} = \bar 0 = \bar F \Rightarrow \bar p = \bar c$ σταθερή ορμή

$\bar L = \bar r \times \bar p$, $\frac{d\bar L}{dt} = \bar 0 = \bar r \times \bar F = \bar N = 0$ ροπή, τότε $\bar L = \bar c$ σταθερή

$E_{ολ} = E_{κιν} + E_{ΔΥΝ.} = T + V =$ σταθερή

→ ΑΔΜΕ (ΠΡΟΣΟΧΗ!: ΜΟΝΟ ΓΙΑ ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ)

Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας:

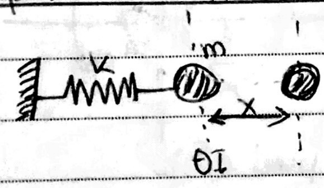
$W = \Delta T = T_B - T_A$

Ομογενές Βαρυτικό Πεδίο

$\bar F = -mg\hat k$, $\quad \bar\nabla \times \bar F = \bar 0$ αστρόβιλο $\Longleftrightarrow \bar F$ συντηρητική $\Longleftrightarrow W = \oint_D \bar F \cdot d\bar r = 0$

$\exists V : \bar F = -\bar\nabla V \Rightarrow \dots \Rightarrow V(z) = mgz + c.$

Νόμος του Hooke



$\bar F = -kx\hat i$ άρα $\begin{cases} F_x = -kx \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases}$

1) Διατηρητική; ΝΑΙ $(\bar\nabla \times \bar F = \bar 0)$

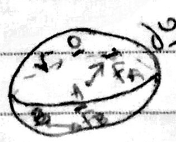
2) $-\frac{dV}{dx} = F_x \Rightarrow \frac{dV}{dx} = kx \Rightarrow V(x) = \frac{kx^2}{2} + \cancel{c}^{\,0}$ $(x=0, V(x)=0)$

$\Rightarrow \boxed{V(x) = \frac{kx^2}{2}}$

Πεδίο Κεντρικών Δυνάμεων

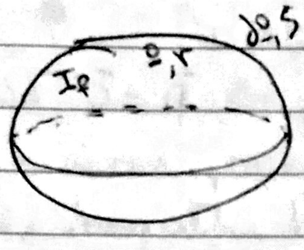
πεδίο: → Διανυσματικό ή Διανυσματική συνάρτηση: $\bar F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

π.χ. $\bar F = F_x\hat i + F_y\hat j + F_z\hat k$ ← Αυτό στο Ω ορίζει ένα Δ.Π.



Πεδίο → Βαθμωτό ή Βαθμωτή συνάρτηση στο $\Omega \subseteq \mathbb{R}$

π.χ. $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$



Πληροφοριακά:

πίεση: $p = \frac{|\bar F|}{\Delta S}$ ← τάση

στοιχειώδη μετατόπιση

Δεν είναι δύναμη ακριβώς αλλά τάση.

Η πίεση που δεχόμαστε από την ατμόσφαιρα είναι:

$P_{atm} = 1\ atm = 101350\ Pa = 101350\ Nt/m^2$ (Αρκετά μεγάλη)

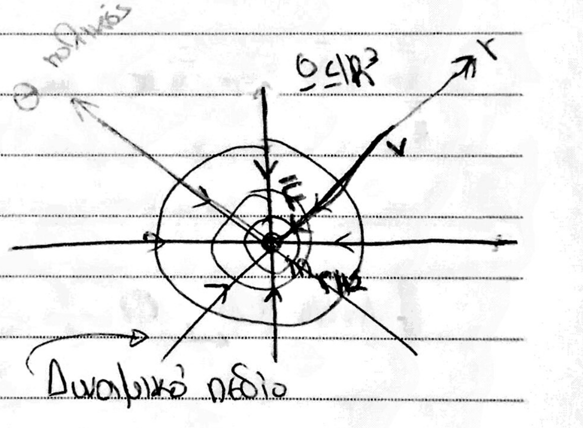
Pascal

Ορισμός: Κεντρικές Δυνάμεις

Λέγονται οι δυνάμεις για τις οποίες ισχύει:

$$\bar F = f(r)\cdot \bar r_0 \quad , \quad \bar r_0 = \frac{\bar r}{|\bar r|}$$

Αναπαράσταση κεντρικού πεδίου της Γης στο επίπεδο:



Ισοδυναμικές επιφάνειες: Ομόκεντροι κύκλοι

Δηλ. σε κάθε κύκλο έχουμε το ίδιο δυναμικό σε όλα τα σημεία του

Άσκηση: Να δ.ο. για αυτές τις δυναμικές ισχύει: $\bar\nabla \times \bar F = \bar 0$

Λύση

$$\operatorname{curl}\bar F = \bar\nabla\times\bar F = \begin{vmatrix} \bar r_0 & \bar\theta_0 & \bar\varphi_0 \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \\ f(r) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \bar 0$$

↑ σφαιρικές

Όμοια, μπορώ να δ.ο. ροπή $\bar N = \bar r \times \bar F = \bar 0$ άρα $\bar L = \bar c$ (διατηρείται η στροφορμή)

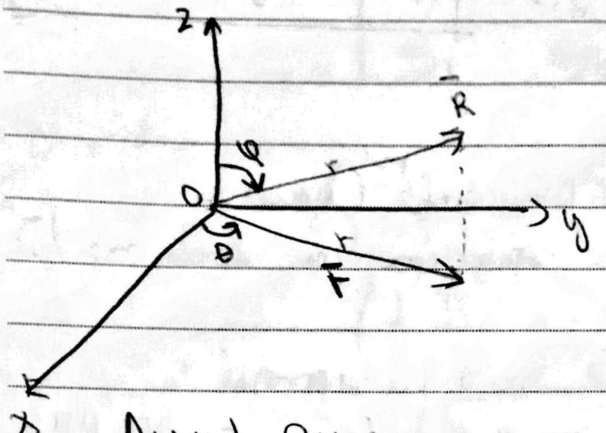
Σφαιρικές

$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$

$|J| = r^2\sin\varphi$



Διάνυσμα Θέσης

Προβολή στο Oxy

Μοναδιαία: $\bar{r}_0, \bar{\theta}_0, \bar{\varphi}_0$

Αζιμουθιακή Μετατόπιση: φ

$\varphi : [0, \pi]$

$\theta : [0, 2\pi)$

Κυλινδρικές

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = z$

περιστροφή και μετατόπιση περιγράφει ο Ιακωβιανός

$|J| = r$

Ο 2x2 σου δείχνει τη στροφή και ο υπόλοιπος την μετατόπιση

$$J = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Σε καρτεσιανές: $\bar{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\bar{k}$

Βάθμωση της συνάρτησης του δυναμικού

Σε κυλινδρικές: $\bar{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\bar{r}_0 + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\bar{\theta}_0 + \frac{\partial V}{\partial z}\bar{z}_0$

Το θ είναι γωνία

Σε σφαιρικές: $\bar{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\bar{r}_0 + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\bar{\theta}_0 + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\bar{\varphi}_0 \cdot \frac{1}{r\sin\theta}$

$$\bar{F} = -\bar{\nabla} V \Rightarrow \begin{cases} f(r) = -\dfrac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow \dfrac{\partial V}{\partial r} = -f(r) \\ 0 = -\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ 0 = -\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \end{cases} \Rightarrow V = V(r) \Rightarrow \boxed{V(r) = -\int f(r)\,dr + c}$$

Ολοκληρώματα κινήσεως

$\bar{r}, \bar{u}, \bar{a}$ → Μιλάμε για Διαφορικές Εξισώσεις

Εξισώσεις κινήσεως Υ.Σ. (Οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση του Υ.Σ.)

Αν $\left.\begin{array}{l} \bar{r}(t) = \bar{c} \\ \bar{v} = \bar{0} \\ \bar{a} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\bar{F} = m\cdot\bar{a}}_{\text{εξίσωση κινήσεως } (\Sigma\bar{F} = m\bar{a} \text{ 2ος ΝΝ})} = \bar{0}$ το σώμα ισορροπεί

Άρα: α) 2ος Ν.Ν.: $m\bar{a} = \Sigma\bar{F} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$

β) Ορμή του Υ.Σ.: $\bar{p} = m\cdot\bar{u} \Rightarrow \begin{cases} P_x = m\dot{x} \\ P_y = m\dot{y} \\ P_z = m\dot{z} \end{cases}$

γ) Στροφορμή Υ.Σ.: $\bar{L} = \bar{r} \times \bar{u} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} =$

$= (y\dot{z} - z\dot{y})\bar{i} + (x\dot{z} - z\dot{x})\bar{j} + (x\dot{y} - y\dot{x})\bar{k}$

δ) Ολική ή Μηχανική Ενέργεια:

$E_{ολ} = \dfrac{1}{2}(m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2) + V(x,y,z) =$ σταθερό

Οι ποσότητες α, β, γ, δ καλούνται ολοκληρώματα κινήσεως.

Άσκηση: $\bar{F} = 5r\,\bar{r}_0 + \frac{10}{\theta}\,\bar{\theta}_0 + 5\,\bar{z}_0$

Να βρεθεί το δυναμικό V (αν υπάρχει)

Απάντηση: Δ.ο. το πεδίο $\bar{F}(r,\theta,z)$ είναι αστρόβιλο:

$$\bar{\nabla}\times\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{r}_0 & \bar{\theta}_0 & \bar{z}_0 \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial z \\ 5r & 10/\theta & 5 \end{vmatrix} = \dots = \bar{0}$$

$$\bar{F} = -\bar{\nabla} V \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial r} = -5r \Rightarrow V = \frac{-5r^2}{2} + g_1(\theta,z) \\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = -\frac{10}{\theta} \Rightarrow V = -10r\ln\theta + g_2(r,z) \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -5 \Rightarrow V = -5z + g_3(r,\theta) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r,\theta,z) = \frac{-5r^2}{2} - 10r\ln\theta - 5z + C}$$

Άσκηση: Υ.Σ., m, κινείται στο επίπεδο,
$\bar{F} = a(\sin\omega t\,\bar{i} + \cos\omega t\,\bar{j})$

Αν αρχικά ηρεμεί στην αρχή των αξόνων $O(0,0)$

a) W μετά από χρόνο t

β) Ισχύς: $P = \frac{dW}{dt}$

Απάντηση:

$$W = \oint_c \bar{F}\cdot d\bar{r} = \oint_c \bar{F}\cdot\bar{u}\,dt = \int_0^t (F_x\cdot\dot{x} + F_y\cdot\dot{y})\,dt$$

Θέλω να γράψω τα F_x, F_y συναρτήσει του t

$F = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} = a\sin\omega t\,\bar{i} + a\cos\omega t\,\bar{j}$

Διαν. ταχύτητας: $\bar{u} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j}$

ΣΔΕ, $1^{ης}$ τ., γραμμ., μη ομ.

$$m\cdot\bar{a} = \bar{F} \Rightarrow m\cdot\frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{F} \Rightarrow \begin{cases} m\frac{d\dot{x}}{dt} = F_x = a\sin\omega t \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{a}{m}\sin\omega t \\ m\frac{d\dot{y}}{dt} = F_y = a\cos\omega t \Rightarrow \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{a}{m}\cos\omega t \end{cases}$$

ολοκλ/νω $\Longrightarrow$ $\int \frac{du}{dt}\,dt = \int \frac{a}{m}\sin\omega t\,dt \Rightarrow u = \dot{x} = \frac{a}{m\omega}(-\cos\omega t) + c$

$u = \dot{x}$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x} = -\frac{a}{\omega m}\cos\omega t + c} \qquad t=0,\ \dot{x}=0 \Rightarrow 0 = -\frac{a}{m\omega} + c \Rightarrow c = \frac{a}{\omega t}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -\frac{a}{m\omega}\cos\omega t + \frac{a}{m\omega} \Rightarrow \boxed{\dot{x} = \frac{a}{m\omega}(1-\cos\omega t)}$$

Είτε βάλω όρια ολοκλήρωσης είτε όχι (δηλ. γενικευμένο ολοκλ.) βγαίνει το ίδιο αποτέλεσμα.
Θα βρούμε την $\dot{y}$ με όρια ολοκλήρωσης στα ολοκληρώματα.

$$\int \frac{d\dot{y}}{dt}\,dt = \frac{a}{m}\int \cos\omega t\,dt \Rightarrow \int_0^{\dot{y}} dv = \frac{a}{m}\int_0^t \cos\omega\tau\,d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \frac{a}{m\omega}\sin\omega\tau\Big|_0^t \Rightarrow \boxed{\dot{y} = \frac{a}{m\omega}\sin\omega t}$$

Άρα: $W = \oint \bar{F}\cdot\bar{u}\,dt = \int_0^t a\sin\omega t\left(\frac{a}{m\omega}(1-\cos\omega t) + a\cos\omega t\left(\frac{a}{m\omega}\sin\omega t\right)\right)dt$

$$= \int_0^t \frac{a^2}{m\omega}\sin\omega t\,dt = \frac{a^2}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

Ισχύς: $P = \frac{dW}{dt} = \frac{a^2}{m\omega^2}\sin\omega t$